# EJERCICIOS DE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

## PUNTOS

***Ejercicio nº 1.-***

**Representa los puntos siguientes:**

$A(0, 5, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(2, -3, 1)$

***Ejercicio nº 2.-***

**Representa los puntos siguientes:**

$A(4, -1, 2)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(0, 4, 0)$

***Ejercicio nº 3.-***

**Representa los puntos siguientes:**

$A(0, 0, 2)$, $B(3, 2, 4)$ y $C(4, -1, 3)$

***Ejercicio nº 4.-***

**Representa los puntos siguientes:**

$A(0, 3, 1)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(1, -2, 4)$

***Ejercicio nº 5.-***

**Representa los puntos siguientes:**

$A(2, 3, -4)$, $B(5, 3, 0)$ y $C(0, 0, 4)$

***Ejercicio nº 6.-***

**Halla las coordenadas de los puntos $P$ y $Q$ que dividen al segmento de extremos $A(3, -1, 2)$ y $B(-2, 2, 4)$ en tres partes iguales.**

***Ejercicio nº 7.-***

**Halla el simétrico, $P'$, del punto $P(2, 1, -3)$ respecto de $Q(3, 5, 1)$.**

***Ejercicio nº 8.-***

**Calcula el valor de $a$ para el cual los siguientes puntos están alineados:**

**$A(2, a, 0)$, $B(6, 5, 2)$, $C(8, 7, 3)$**

***Ejercicio nº 9.-***

**Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(3, 0, -1)$ y $B(2, -2, 3)$. El centro del paralelogramo está en el punto $M(1, 2, -1)$.**

**Halla los otros dos vértices.**

***Ejercicio nº 10.-***

**Los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(5, -1, 1)$ y $C(-2, 3, 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obten el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.**

# RECTAS

***Ejercicio nº 11.-***

**a) Investiga la posición relativa de las dos rectas siguientes en el espacio:**

**La primera está dada por $x - 5 = y - 7 = z$, y la segunda, por los planos:**

$$\begin{cases} 2x - 3y + 11 = 0 \\ y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$ **. Explica el procedimiento.**

**b) Halla si es posible, el punto de intersección.**

***Ejercicio nº 12.-***

**Consideramos las dos rectas:**

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z+d}{-2}$$

**Halla el valor de $d$ para que las rectas se corten. Halla el punto de intersección para el valor de $d$ obtenido.**

***Ejercicio nº 13.-***

**a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:**

$$r:\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+2z=2\end{cases} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z}{-6}$$

**b) Comprueba si los puntos *A*(1, 0, –2) y *B*(2, –10,–6) pertenecen a alguna de las rectas anteriores.**

***Ejercicio nº 14.-***

**Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de *k*:**

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-k}{3}$$

***Ejercicio nº 15.-***

**Estudia la posición relativa de las rectas $r_1$ y $r_2$:**

$$r_1:\begin{cases}x+y-2z+1=0\\ 2x-y+z-1=0\end{cases} \qquad r_2:\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=-3\lambda\end{cases}$$

**Razona la respuesta.**

# PLANOS

***Ejercicio nº 16.-***

**Halla la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de:**

$$\left.\begin{aligned}x-2y+z&=0\\ 2x-3z&=5\\ x+y&=1\end{aligned}\right\}$$

**y es paralelo al plano que contiene a los puntos:**

***A*(1, 0, –3), *B*(2, 1, 4) y *C*(0, 2, 3)**

***Ejercicio nº 17.-***

**Determina, en función de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:**

$$\left.\begin{aligned}(a-2)x+y-z&=-1\\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z&=a\\ -x+ay+z&=a\end{aligned}\right\}$$

***Ejercicio nº 18.-***

**Dados los planos:**

$\pi$: $4x + my + mz = 6$ y $\sigma$: $mx + y + z + 3 = 0$

**estudia su posición relativa según los valores de** $m$.

***Ejercicio nº 19.-***

**a) Halla los valores de** $m$ **y** $n$ **para que los siguientes planos sean paralelos:**

$\pi_1$: $2x - y + z - 5 = 0$ y $\pi_2$: $mx + ny + 2z + 3 = 0$

**b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a** $\pi_1$ **que pase por el punto** $A(3, -2, 1)$.

***Ejercicio nº 20.-***

**Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro** $a$:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$\pi_2$: $4x + ay - 2z = 5$

# RECTAS Y PLANOS

***Ejercicio nº 21.-***

**Explica cuál ha de ser el valor de** $m$ **que hace que el tercer plano de la siguiente familia contenga a la recta definida por los dos primeros.**

**Los planos son:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 22.-***

**Halla la ecuación del plano que contiene a la recta:**

$$r : \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

**y al punto** $P(2, -3, 1)$. **Explica el procedimiento.**

***Ejercicio nº 23.-***

**Nos dan las rectas *r*, determinada por los puntos *A*(2, –1, 1), *B*(0, 1, –1), y *s* determinada por *C*(2, 0, –1) y *D*(2, 1, –1).**

**a) Escribe la ecuación general (o implícita) del plano paralelo a *r* y *s* que pasa por el origen de coordenadas.**

**b) Escribe la ecuación general del plano que pasa por *B* y es perpendicular a *r*.**

***Ejercicio nº 24.-***

**Se consideran las rectas:**

$$r:\begin{cases} x-1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}, \qquad s:\begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$$

**y el plano $\pi$, que pasa por los puntos *A*(1, 0, 2), *B*(2, 1, 2) y *C*(1, 0, 1).**

**a) Da la ecuación general o implícita de $\pi$.**

**b) Una de las dos rectas corta a $\pi$. Determínala.**

**c) Comprueba que la otra recta es paralela a $\pi$.**

***Ejercicio nº 25.-***

**Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*, siendo:**

$$r:\begin{cases} y=2z-4 \\ x=3z-8 \end{cases} \qquad s:\frac{x-10}{1}=\frac{y-20}{-1}=\frac{z}{1}$$

# SOLUCIONES

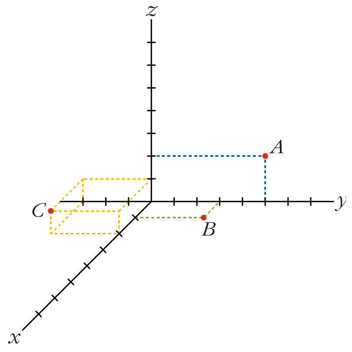
## PUNTOS

***Ejercicio nº 1.-***

**Representa los puntos siguientes:**

**$A(0, 5, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(2, -3, 1)$**

***Solución:***

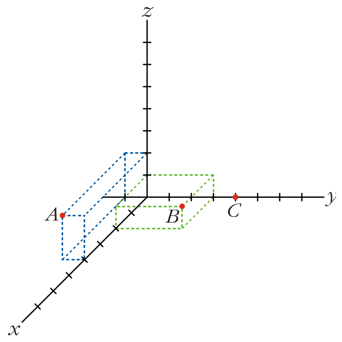



***Ejercicio nº 2.-***

**Representa los puntos siguientes:**

**$A(4, -1, 2)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(0, 4, 0)$**

***Solución:***

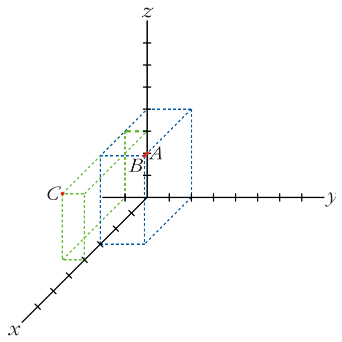



***Ejercicio nº 3.-***

**Representa los puntos siguientes:**

**$A(0, 0, 2)$, $B(3, 2, 4)$ y $C(4, -1, 3)$**

***Solución:***

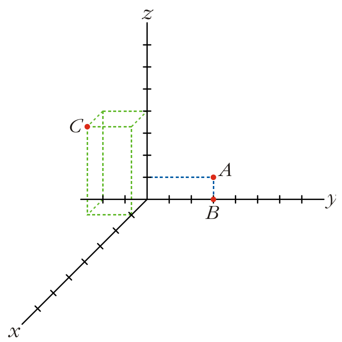



***<u>Ejercicio nº 4.-</u>***

**Representa los puntos siguientes:**

**$A(0, 3, 1)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(1, -2, 4)$**

***Solución:***

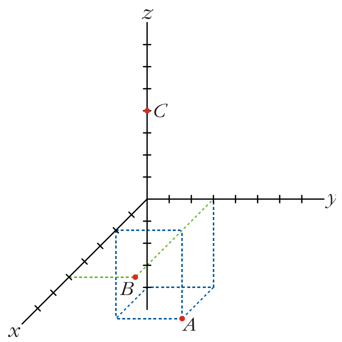



***<u>Ejercicio nº 5.-</u>***

**Representa los puntos siguientes:**

**$A(2, 3, -4)$, $B(5, 3, 0)$ y $C(0, 0, 4)$**

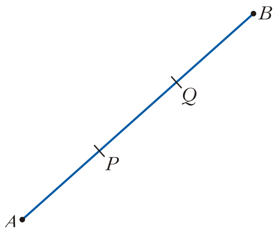
***Solución:***



***Ejercicio nº 6.-***

**Halla las coordenadas de los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento de extremos *A*(3, –1, 2) y *B*(–2, 2, 4) en tres partes iguales.**

***Solución:***



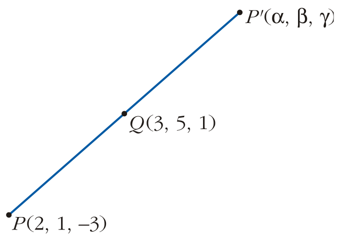

$$P=\left(\frac{3-2}{3},\ \frac{-1+2}{3},\ \frac{2+4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 2\right)$$

$$Q=\left(\frac{2(3-2)}{3},\ \frac{2(-1+2)}{3},\ \frac{2(2+4)}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ 4\right)$$

***Ejercicio nº 7.-***

**Halla el simétrico, *P* ', del punto *P*(2, 1, –3) respecto de *Q*(3, 5, 1).**

***Solución:***




Llamamos $P'(\alpha, \beta, \gamma)$, de manera que:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{2+\alpha}{2}=3 & \rightarrow & \alpha=4 \\ \dfrac{1+\beta}{2}=5 & \rightarrow & \beta=9 \\ \dfrac{-3+\gamma}{2}=1 & \rightarrow & \gamma=5 \end{array}\right\} P'(4, 9, 5)$$

***Ejercicio nº 8.-***

**Calcula el valor de *a* para el cual los siguientes puntos están alineados:**

***A*(2, a, 0), *B*(6, 5, 2), *C*(8, 7, 3)**

***Solución:***

Los puntos $A$, $B$ y $C$ están alineados siempre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{6-2}{8-6}=\frac{5-a}{7-5}=\frac{2-0}{3-2}$$

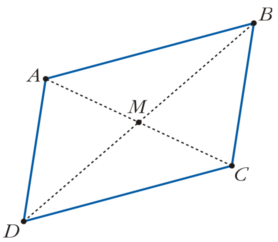
$$\frac{5-a}{2}=2 \;\rightarrow\; 5-a=4 \;\rightarrow\; a=1$$

***<u>Ejercicio nº 9.-</u>***

**Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(3, 0, -1)$ y $B(2, -2, 3)$. El centro del paralelogramo está en el punto $M(1, 2, -1)$.**

**Halla los otros dos vértices.**

***Solución:***




Llamemos $C=(x_1, y_1, z_1)$ y $D=(x_2, y_2, z_2)$.

$C$ es el simétrico de $A$ respecto de $M$, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3+x_1}{2}=1 \;\rightarrow\; x_1=-1\\[2mm] \dfrac{0+y_1}{2}=2 \;\rightarrow\; y_1=4\\[2mm] \dfrac{-1+z_1}{2}=-1 \;\rightarrow\; z_1=-1\end{array}\right\}\; C=(-1, 4, -1)$$

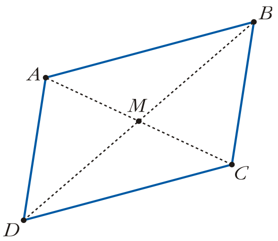
Por otro lado, $D$ es el simétrico de $B$ respecto de $M$. Así:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2+x_2}{2}=1 \;\rightarrow\; x_2=0\\[2mm] \dfrac{-2+y_2}{2}=2 \;\rightarrow\; y_2=6\\[2mm] \dfrac{3+z_2}{2}=-1 \;\rightarrow\; z_2=-5\end{array}\right\}\; D=(0, 6, -5)$$

***Ejercicio nº 10.-***

**Los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(5, -1, 1)$ y $C(-2, 3, 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obten el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.**

***Solución:***




Como se trata de un paralelogramo, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Si $D = (x, y, z)$:

$$(2, -1, -1) = (-2 - x,\ 3 - y,\ 1 - z)$$

de donde: $x = -4$, $y = 4$, $z = 2 \ \rightarrow\ D(-4, 4, 2)$

El centro del paralelogramo es el punto medio de una de las dos diagonales, así:

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

# RECTAS

***Ejercicio nº 11.-***

**a) Investiga la posición relativa de las dos rectas siguientes en el espacio:**

**La primera está dada por $x - 5 = y - 7 = z$, y la segunda, por los planos:**

$\begin{cases} 2x - 3y + 11 = 0 \\ y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$. **Explica el procedimiento.**

**b) Halla si es posible, el punto de intersección.**

***Solución:***

a) • Primera recta, $r : \begin{cases} \text{Punto}: R(5, 7, 0) \\ \text{Vector dirección}: \vec{d}_r = (1, 1, 1) \end{cases}$

• Segunda recta, $s : \begin{cases} \text{Punto}: y = 1,\ x = -4,\ z = -3 \ \rightarrow\ S(-4, 1, -3) \\ \text{Vector dirección}: \vec{d}_s = (2, -3, 0) \times (0, 1, -2) = (6, 4, 2) \end{cases}$

Los vectores dirección $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no son paralelos. Por tanto, $r$ y $s$ se cortan o se cruzan.

Para averiguar si ocurre lo uno o lo otro, vemos si el vector $\overrightarrow{RS}$, está o no en el mismo plano que $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Para ello estudiaremos el determinante de la matriz formada por las coordenadas de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$.

$$\overrightarrow{RS} = (-9, -6, -3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\overrightarrow{RS}$ está en el mismo plano que $r$ y $s$, lo que implica que las rectas $r$ y $s$ se cortan.

b) Expresamos la primera recta en paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Sustituimos en uno de los planos que definen a la segunda recta:

$2(5 + \lambda) - 3(7 + \lambda) + 11 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$

Sustituimos este valor de $\lambda$ y obtenemos $P(5, 7, 0)$.

***Ejercicio nº 12.-***

**Consideramos las dos rectas:**

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z+d}{-2}$$

**Halla el valor de *d* para que las rectas se corten. Halla el punto de intersección para el valor de *d* obtenido.**

***Solución:***

- Veamos cuáles son las ecuaciones paramétricas de $r$:

Un punto de r: $y = 0 \rightarrow x = 1,\ z = -2 \rightarrow R(-1, 0, -2)$

Vector dirección: $(1, 1, 1) \times (1, -1, -1) = (0, 2, -2) \,//\, (0, 1, -1)$

Ecuaciones paramétricas de $r$: $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$

- Ecuaciones paramétricas de $s$:

Un punto: (–1, –1, –$d$)

Vector dirección: (2, 1, –2)

Ecuaciones paramétricas de $s$: $\begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -d - 2\mu \end{cases}$

Para que $r$ y $s$ se corten, el siguiente sistema ha de tener solución:

$$\left.\begin{array}{r} -1 = -1 + 2\mu \\ \lambda = -1 + \mu \\ -2 - \lambda = -d - 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \lambda = -1 \\ -1 = -d \quad \to \quad d = 1 \end{array}$$

Si $d = 1$, las rectas se cortan en el punto (–1, –1, –1), (se obtiene al sustituir $\lambda$ en las ecuaciones de $r$, o bien $\mu$ y $d$ en las ecuaciones de $s$).

***<u>Ejercicio nº 13.-</u>***

**a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:**

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z}{-6}$$

**b) Comprueba si los puntos *A*(1, 0, –2) y *B*(2, –10,–6) pertenecen a alguna de las rectas anteriores.**

***Solución:***

a) $r: \begin{cases} \text{Vector dirección: } \vec{d}_1 = (2,\ 1,\ -1) \times (1,\ -2,\ 2) = (0,\ -5,\ -5) \\ \text{Un punto: si } z = 0 \ \to \ y = 0,\ x = 2 \ \to \ P(2,\ 0,\ 0) \end{cases}$

$s: \begin{cases} \text{Vector dirección: } \vec{d}_2 = (2, -10, -6) \\ \text{Un punto: } Q(2, -1, 0) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 0)$

El rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ y $\overrightarrow{PQ}$ nos informa sobre la posicioón relativa de $r$ y $s$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 2 & -10 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

El rango de $\left(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{PQ}\right)$ es tres. Por tanto, las rectas se cruzan.

b) Ni $A$ ni $B$ pertenecen a las rectas $r$ y $s$.

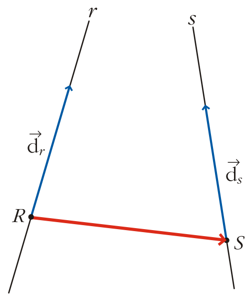
## ***Ejercicio nº 14.-***

**Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de $k$:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-k}{3}$$

### ***Solución:***

$$\left.\begin{array}{l} r:\ \vec{d}_r = (2, 4, 5) \ \rightarrow \ R = (1, 3, 0) \\ s:\ \vec{d}_s = (2, 1, 3) \ \rightarrow \ S = (3, 0, k) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS} = (2, -3, k)$$




Estudiaremos el rango de la matriz formada por las coordenadas de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & k \end{vmatrix} = -6k + 2; \ -6k + 2 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{3}$$

Si $k = \frac{1}{3}$ los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, por tanto las rectas se cortan. Si $k \neq \frac{1}{3}$, las rectas se cruzan.

## ***Ejercicio nº 15.-***

**Estudia la posición relativa de las rectas $r_1$ y $r_2$:**

$$r_1: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

**Razona la respuesta.**

### ***Solución:***

$$r_1: \begin{cases} \text{Vector de dirección: } \vec{d}_1 = (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \\ \text{Un punto: si } z = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ y = -1 \ \rightarrow \ R_1(0, -1, 0) \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} \text{Vector dirección: } \vec{d}_2 = (-3, 3, -3) \\ \text{Un punto: } R_2(0, 1, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_1R_2} = (0, 2, 0)$$

El rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ y $\overrightarrow{R_1R_2}$ nos informa sobre la posición relativa de $r_1$ y $r_2$:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6) = 12 \neq 0$$

El rango de $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{R_1R_2})$ es 3. Por tanto, las rectas se cruzan.

# PLANOS

***Ejercicio nº 16.-***

**Halla la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de:**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x - 2y + z = 0} \\ \boldsymbol{2x - 3z = 5} \\ \boldsymbol{x + y = 1} \end{aligned}\right\}$$

**y es paralelo al plano que contiene a los puntos:**

***A*(1, 0, –3), *B*(2, 1, 4) y *C*(0, 2, 3)**

***Solución:***

El sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3z = 5 \\ x + y = 1 \end{aligned}\right\} \text{ tiene como solución el punto: } P(1, 0, -1)$$

Obtenemos el plano que contiene a $A$, $B$ y $C$:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 7) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 6) \end{aligned}\right\} \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, -13, 3)$$

El plano buscado tiene como vector normal $\vec{n} = (-8, -13, 3)$ y pasa por $P(1, 0, -1)$, así:

$$-8(x - 1) - 13(y - 0) + 3(z + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad -8x - 13y + 3z + 11 = 0$$

## *Ejercicio nº 17.-*

**Determina, en función de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:**

$$\left.\begin{aligned} (a-2)x+y-z&=-1\\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z&=a\\ -x+ay+z&=a\end{aligned}\right\}$$

***Solución:***

Estudiamos la posición relativa a partir de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1\\ -a & 2a-1 & -a+2\\ -1 & a & 1\end{vmatrix}=a^3-a^2-a+1=(a-1)^2\cdot(a+1)$$

- $a=1$

$$\left.\begin{aligned} -x+y-z&=1\\ -x+y+z&=1\\ -x+y+z&=1\end{aligned}\right\}\text{ Tenemos dos planos coincidentes } (2^{\underline{o}} \text{ y } 3^{\underline{o}}) \text{ y el otro } (1^{\underline{o}}) \text{ los corta.}$$

- $a=-1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3^{\underline{a}})+(1^{\underline{a}})]{(2^{\underline{a}})+3\cdot(1^{\underline{a}})}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1\\ -8 & 0 & 0 & -4\\ -4 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Los tres planos se cortan en una recta.

- $a\neq 1$ y $a\neq -1$, los tres planos se cortan en un punto.

## *Ejercicio nº 18.-*

**Dados los planos:**

**$\pi$: $4x+my+mz=6$ y $\sigma$: $mx+y+z+3=0$**

**estudia su posición relativa según los valores de *m*.**

***Solución:***

Las ecuaciones de los planos son:

$$\left.\begin{aligned} 4x+my+mz&=6\\ mx+y+z&=-3\end{aligned}\right\}$$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si $m=2$.

En tal caso, las ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = -3 \end{array}\right\}$$

Los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $m \neq 2$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

***<u>Ejercicio nº 19.-</u>***

**a) Halla los valores de *m* y *n* para que los siguientes planos sean paralelos:**

$$\pi_1\text{: } 2x - y + z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2\text{: } mx + ny + 2z + 3 = 0$$

**b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a $\pi_1$ que pase por el punto *A*(3, –2, 1).**

***Solución:***

a) Si $\pi_1$ y $\pi_2$ han de ser paralelos, se tiene que:

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{-1} = \frac{2}{1} \quad \rightarrow \quad m = 4,\ n = -2$$

b) El plano buscado ha de ser de la forma: $2x - y + z + D = 0$

Si contiene al punto $A$, debe verificarse:

$2 \cdot 3 - 1(-2) + 1 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -9$

El plano será: $2x - y + z - 9 = 0$

***<u>Ejercicio nº 20.-</u>***

**Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro *a*:**

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\pi_2\text{: } 4x + ay - 2z = 5$$

***Solución:***

$\pi_1$, expresado de forma implícita, es:

$2x + 2y - z = 5$

Así, tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 5 \\ 4x + ay - 2z = 5 \end{array}\right\}$$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si $a = 4$.

  En tal caso, los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $a \neq 4$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

# RECTAS Y PLANOS

***Ejercicio nº 21.-***

**Explica cuál ha de ser el valor de $m$ que hace que el tercer plano de la siguiente familia contenga a la recta definida por los dos primeros.**

**Los planos son:**

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 2} \\ \mathbf{2x + 3y + z = 3} \\ \mathbf{mx + 10y + 4z = 11} \end{cases}$$

***Solución:***

Se trata de hallar el valor de $m$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

Matricialmente:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}} & 2 \\ 2 & & 3 \\ m & 10 \quad 4 & 11 \end{pmatrix}}_{A}}_{A'}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$ efectivamente los dos primeros planos se cortan a lo largo de una recta. Para que el 3er plano contenga a dicha recta, ha de ser $ran(A) = ran(A') = 2.$

Para estudiar el rango de $A'$ hallamos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Con todo esto podemos afirmar que $ran(A) = ran(A')$. Para que este rango sea 2, bastará con que $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ m & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 20 + m - 3m - 10 - 8 = -2m + 14 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 7$$

*Conclusión:* Para $m = 7$, el sistema es compatible determinado.

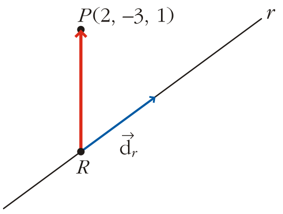
## ***<u>Ejercicio nº 22.-</u>***

**Halla la ecuación del plano que contiene a la recta:**

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}}$$

**y al punto $P(2, -3, 1)$. Explica el procedimiento.**

***Solución:***




1º. Hallamos un punto, $R \in r$. Por ejemplo, haciendo $x = 0$ obtenemos:

$R(0, -1, 1)$

2º. Hallamos $\vec{d}_r$, vector dirección de $r$.

$$\vec{d}_r = (2, -1, 1) \times (1, 3, -1) = (-2, 3, 7)$$

3º. El vector $\overrightarrow{RP} \times \vec{d}_r$ será normal al plano buscado:

$$\overrightarrow{RP}(2, -2, 0)$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d}_r = (2, -2, 0) \times (-2, 3, 7) = (-14, -14, 2)$$

Podemos tomar $\vec{n}(7, 7, -1)$.

4º. El plano pasa por $P(2, -3, 1)$ y es perpendicular a $(7, 7, -1)$. Su ecuación será:

$$7(x-2)+7(y+3)-1(z-1)=0 \;\rightarrow\; 7x-14+7y+21-z+1=0$$

$$\rightarrow\; 7x+7y-z+8=0$$

***<u>Ejercicio nº 23.-</u>***

**Nos dan las rectas *r*, determinada por los puntos *A*(2, –1, 1), *B*(0, 1, –1), y *s* determinada por *C*(2, 0, –1) y *D*(2, 1, –1).**

**a) Escribe la ecuación general (o implícita) del plano paralelo a *r* y *s* que pasa por el origen de coordenadas.**

**b) Escribe la ecuación general del plano que pasa por *B* y es perpendicular a *r*.**

***Solución:***

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1, 0, 1) = \vec{n}$ es un vector perpendicular al plano buscado.

Ecuación del plano:

$$-1x+0y+1z=0 \;\rightarrow\; -x+z=0$$

b) Un plano perpendicular a $r$ tiene por vector normal $\vec{d}_r = (1, -1, 1)$.

Ecuación del plano buscado:

$$1(x-0)-1(y-1)+1(z+1)=0 \;\rightarrow\; x-y+z+2=0$$

***<u>Ejercicio nº 24.-</u>***

**Se consideran las rectas:**

$$r:\begin{cases} x-1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}, \qquad s:\begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$$

**y el plano $\pi$, que pasa por los puntos *A*(1, 0, 2), *B*(2, 1, 2) y *C*(1, 0, 1).**

**a) Da la ecuación general o implícita de $\pi$.**

**b) Una de las dos rectas corta a $\pi$. Determínala.**

**c) Comprueba que la otra recta es paralela a $\pi$.**

***Solución:***

a) Obtención del vector normal al plano $\pi$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,1,2)-(1,0,2)=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1)-(1,0,2)=(0,0,-1)\end{array}\right\}\ \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$$

Ecuación del plano:

$$-1(x-1)+1(y-0)+0(z-2)=0 \quad\to\quad \pi\text{: } x-y+1=0$$

b) Hallamos los vectores de dirección de las rectas:

$$\vec{d}_r=(1,0,0)\times(0,2,1)=(0,-1,2)$$

$$\vec{d}_s=(1,0,-1)\times(0,1,-1)=(1,1,1)$$

¿$r$ corta a $\pi$? Veamos si $\vec{d}_r$ es o no paralelo a $\vec{n}$:

$$\vec{d}_r\cdot\vec{n}=(0,-1,2)\cdot(-1,1,0)=-1\neq 0$$

Por tanto, $r$ corta a $\pi$.

c) ¿$s$ corta a $\pi$? Veamos si $\vec{d}_s$ es o no paralelo a $\vec{n}$:

$$\vec{d}_s\cdot\vec{n}=(1,1,1)\cdot(-1,1,0)=0$$

Por tanto, $s$ es paralela a $\pi$ o, acaso, está contenida en $\pi$.

Hallamos un punto de $s$: $z=0 \;\to\; x=2,\ y=2 \;\to\; S(2, 2, 0)$

$S$ no pertenece a $\pi$, por tanto, $s$ es paralela a $\pi$.

***Ejercicio nº 25.-***

**Halla la ecuación del plano $\pi$ que contiene a la recta $r$ y es paralelo a la recta $s$, siendo:**

$$r:\begin{cases}y=2z-4\\ x=3z-8\end{cases}\qquad s:\frac{x-10}{1}=\frac{y-20}{-1}=\frac{z}{1}$$

***Solución:***

El vector de dirección de $r$ se obtiene a partir de los vectores normales a los planos que definen la recta $r$.

$$\vec{n}_1=(0,1,-2),\quad \vec{n}_2=(1,0,-3)$$

$$\vec{d}_r=(0,1,-2)\times(1,0,-3)=(3,2,1)$$

El vector normal, $\vec{n}$, al plano $\pi$ buscado es perpendicular a $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Por tanto:

$$\vec{n} = (3, 2, 1) \times (1, -1, 1) = (3, -2, -5)$$

Puesto que $\pi$ contiene a $r$, localicemos un punto de $\pi$ a partir de $r$:

En $r$, si $z = 0$, se obtiene $y = -4$, $x = -8$.

Por tanto, $(-8, -4, 0) \in \pi$.

Ecuación de $\pi$:

$$3(x + 8) - 2(y + 4) - 5\,(z - 0) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - 2y - 5z + 16 = 0$$